二変数ハイブリッド有理関数近似の誤差評価 (数式処理における理論と応用の研究)

甲斐, 博; 野田, 松太郎

数理解析研究所講究録
1199 巻 2001 年 36-42

二変数ハイブリッド有理関数近似の誤差評価

愛媛大学工学部　甲斐　　博(Hiroshi KAI) *
愛媛大学工学部　野田　松太郎(Matu-Tarow NODA) †

1　はじめに

有理関数補間により高精度の関数近似を得ようとして次数を大きくする場合や、また、未知の関数から得られたデータ列が与えられ有理関数で補間しようとする場合などにおいて、有理関数近似が近似区間において不必要な極を持つ場合がある。我々は、そのような極が分子の零点と近似的に同じ点に現れることを示し、数値数式融合計算アルゴリズムの一つである近似 GCD 算法を用いて取り除くことを行なった [3]。この方法をハイブリッド有理関数近似と呼んでいる。同様な状況が多変数の有理関数近似において起こるのかどうかは未知の問題であり数学的な興味がある。

二変数有理関数補間の場合には、General Order Newton Padé 近似 [2] を用いると、不必要な特異点が現れることがすでに示されており、この場合には、多変数近似 GCD が不必要な特異点を除去するために適用できる [6]。多変数近似 GCD アルゴリズムとしては、Ochi 等のアルゴリズム [4]、Corless 等のアルゴリズム [1] が提案されているが、いずれの方法もこの問題に有効である。

一変数のハイブリッド有理関数近似に関しては、補間するデータの上をどのくらい正確に有理関数近似が通るのかを予め知ることができることが示されている [5]。我々はその大きさの評価のことを誤差評価と呼んでいる。本論では、二変数の場合のハイブリッド有理関数近似の誤差評価方法を与える。一変数の場合と同様な方法を使って与えることができることを示し、実例を用いてその評価が妥当であることを検証する。

*kai@cs.ehime-u.ac.jp
†noda@cs.ehime-u.ac.jp

2 二変数ハイブリッド有理関数近似

2.1 General Order Newton Padé 近似

(x_i, y_j) 上で与えられる、関数値 $f_{i,j}^{(k)}, k = 0, \cdots, r_{ij}$ を補間する問題を考える。ここで、$f_{i,j}^{(k)}$ は、関数 $f(x,y)$ の k 次導関数の (x_i, y_j) における値を表す。すべての i,j について $r_{i,j} = 0$ の場合は通常の補間を意味する。本論文では $r_{i,j} = 0$ の場合のみを考える。

i,j は $(i,j) \in E \subseteq \mathbf{N}^2$ のように $\mathbf{N}^2$ の部分集合として与えられる E に含まれる値である。E は、もし $(i,j) \in E$ ならば $(k,l) \in E, k \leq i, l \leq j$ であることを満足する集合である。さらに、有理関数補間の計算の上で必要な、集合 N, D を次のように与える。

- $N \subset E$
- D は $m+1$ 個の要素を持ち、$\{(i_0, j_0), \cdots, (i_m, j_m)\}$ と表す。
- $E \backslash N$ は少なくとも m 個の要素を持つ。
  さらに、$H \subset E \backslash N$ に対し、$H = \{(h_1, k_1), \cdots, (h_m, k_m)\}$ と表す。

このとき、もし次の行列

$$\begin{pmatrix} f_{i_0 h_1, j_0 k_1} & \cdots & f_{i_m h_1 j_m k_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i_0 h_m, j_0 k_m} & \cdots & f_{i_m h_m j_m k_m} \end{pmatrix}$$

の階数が m ならば、有理関数補間の分子と分母の多項式 $p(x,y), q(x,y)$ は、

$$p(x,y) = \begin{vmatrix} s_0(x,y) & \cdots & s_m(x,y) \\ f_{i_0 h_1, j_0 k_1} & \cdots & f_{i_m h_1, j_m k_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i_0 h_m, j_0 k_m} & \cdots & f_{i_m h_m, j_m k_m} \end{vmatrix},$$

$$q(x,y) = \begin{vmatrix} B_{i_0 j_0}(x,y) & \cdots & B_{i_m j_m}(x,y) \\ f_{i_0 h_1, j_0 k_1} & \cdots & f_{i_m h_1, j_m k_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i_0 h_m, j_0 k_m} & \cdots & f_{i_m h_m, j_m k_m} \end{vmatrix},$$

と表される。ここで、$f_{0i,0j} = f[x_0, \cdots, x_i][y_0, \cdots, y_j]$ は、文献 [2] において定義される値であり、関数値から得られる差分である。また、多項式 $s_k(x,y)$ と $B_{ij}(x,y)$ は、それぞれ、次の多項式により定められる。

$$\begin{aligned} s_k(x,y) &= \sum_{(i,j) \in N} f_{i_k i, j_k j} B_{ij}(x,y), \\ B_{ij}(x,y) &= \Pi_{k=0}^{i-1}(x - x_k) \Pi_{l=0}^{j-1}(y - y_l). \end{aligned}$$

得られた近似は次の性質を持つ。

- 全ての $(i,j) \in E$ に対して、
$$f_{ij} = \frac{p(x_i, y_j)}{q(x_i, y_j)}.$$

2.2 不必要な特異点

本節では未知の関数から得られたデータ列を有理関数で近似することを考える。ここで、データ列は有理関数 $\hat{p}(x,y)/\hat{q}(x,y)$ から計算された近似値と仮定する。前節の方法を用いて、このようなデータ列を補間することは可能であるが、有理関数補間 $p(x,y)/q(x,y)$ の次数が、$\hat{p}(x,y)/\hat{q}(x,y)$ の次数より大きいと、分子と分母の多項式は $p(x,y) \approx \hat{p}(x,y)g(x,y)$、$q(x,y) \approx \hat{q}(x,y)g(x,y)$ と表されるかもしれない。すなわち、この場合、近似的共通因子 $g(x,y)$ のため、有理関数が不必要な特異点を持つ。実際に次の例を考える。

次の関数、
$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2+e^2}{x+y+2},$$
を 15 桁で打ち切って近似した値を f_{ij} とする。x, y の値は $x_i = y_i = i/4$、$i = 0, \cdots, 4$ とする。(x_i, y_j) 上のデータ列 f_{ij} が与えられたと仮定し、その有理関数近似を与えることを考える。

E, N, D は次のように与えることを考える。

$$\begin{aligned}
E &= \{(i,j) \mid 0 \le i \le n_1, 0 \le j \le n_1\},\\
N &= \{(i,j) \mid 0 \le i+j \le n_2\} \cup \left\{\left(\left\lfloor \frac{n_2+2}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_2+2}{2} \right\rfloor\right)\right\},\\
D &= \{(i,j) \mid 0 \le i+j \le n_3\}.
\end{aligned}$$

ここで、$n_1 = 4$、$n_2 = 4, n_3 = 3$ とする。有理関数補間を求めた結果、次のような有理関数が得られる。

$$\begin{aligned}
r(x,y) &= p(x,y)/q(x,y),\\
p(x,y) &= x^4 + (-34.445y + 17.245)x^3 + (2.0000y^2 + 17.245y - 1.8840)x^2\\
&\quad +(-34.445y^3 + 17.245y^2 - 254.52y + 127.43)x\\
&\quad +1.0000y^4 + 17.245y^3 - 1.8840y^2 + 127.43y - 68.519,\\
q(x,y) &= x^3 + (-33.445y + 19.245)x^2 + (-33.445y^2 - 34.400y + 25.217)x\\
&\quad +y^3 + 19.245y^2 + 25.2171y - 18.546.
\end{aligned}$$

得られた近似は図 1 に示す。しかし図 1 の $0.553 \le x \le 0.554, 0.411 \le y \le 0.412$ を部分的に拡大すると図 2 のように不必要な特異点があらわれる。ほとんど近接しているので、分

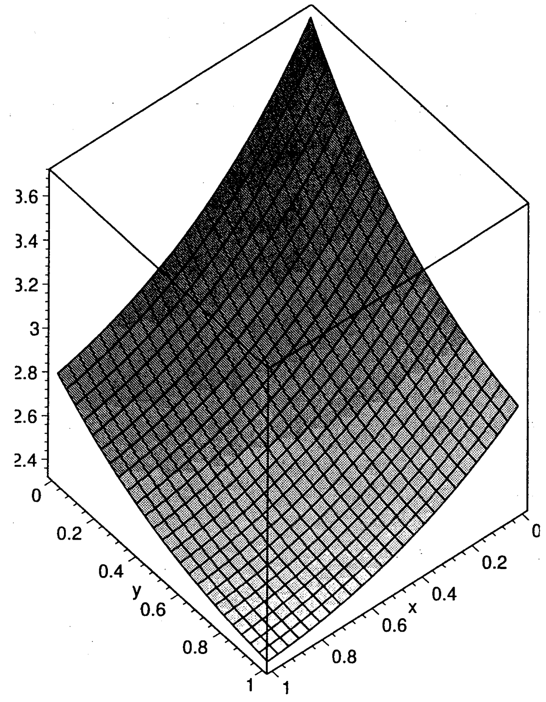

図 1: 有理関数補間 $r(x, y)$

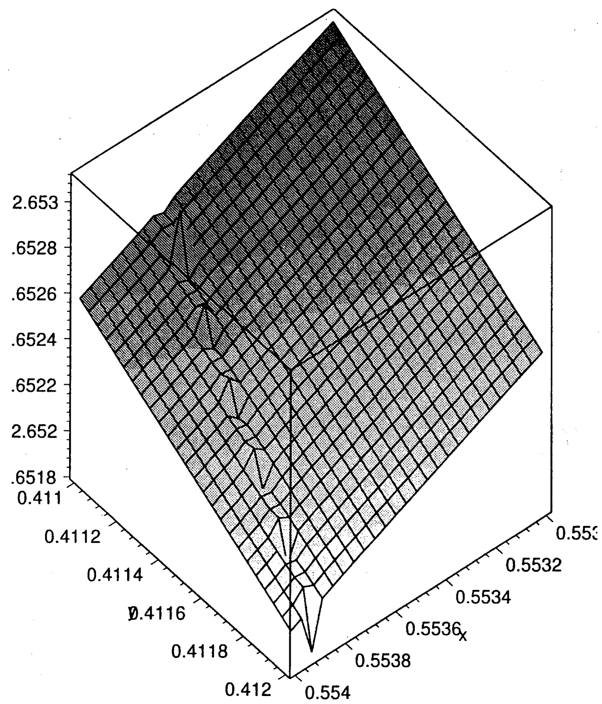

図 2: 不必要な特異点

子と分母の多項式の近似的な共通因子が原因として考えられる。Ochi 等により提案された近似 GCD を用いることにより分子と分母の近似 GCD を求めると、以下の多項式になる。

$$g(x,y) = x^2 + (-34.445y + 17.245)x + y^2 + 17.245y - 9.2730.$$

ここで、近似 GCD のパラメータは $\epsilon = 10^{-4}$ としている。これを除算により取り除くと、

$$\begin{aligned}
\tilde{r}(x,y) &= \tilde{p}(x,y)/\tilde{q}(x,y),\\
\tilde{p}(x,y) &= x^2 + (-7.7910 \times 10^{-12}y^3 + 5.8433 \times 10^{-12}y^2 + 3.0214 \times 10^{-6}y\\
&\quad -1.1123 \times 10^{-5})x - 2.6836 \times 10^{-11}y^4 + 3.4147 \times 10^{-11}y^3\\
&\quad +1.000010398y^2 - 4.3648 \times 10^{-5}y + 7.3891\\
\tilde{q}(x,y) &= x + 1.0000y + 2.0000.
\end{aligned}$$

ここで、$\epsilon = 10^{-4}$ 以下の係数を無視すると有理関数近似は、

$$\tilde{r}(x,y) = \frac{x^2 + 1.0000y^2 + 7.3891}{x + 1.0000y + 2.0000}$$

と表される。明らかに $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ において $\tilde{r}(x,y)$ は不必要な特異点を持たない。

3 二変数ハイブリッド有理関数近似の誤差評価

補間点 $(x,y) = (x_i, y_j)$ とその上での関数値 f_{ij} が与えられたとき。有理関数補間 $p(x,y)/q(x,y)$ はそれらの点を補間する有理関数となる。一方、近似 GCD を取り除いた有理関数近似 $p(x,y)/q(x,y)$ はデータ列に近い点を近似する。有理関数近似の誤差として、$(x,y) = (x_i, y_j)$ の点の上で、次の E を評価することを考える。

$$\left| \frac{p(x_i,y_j)}{q(x_i,y_j)} - \frac{\tilde{p}(x_i,y_j)}{\tilde{q}(x_i,y_j)} \right| \leq E.$$

この評価は一変数の場合と同様にして近似 GCD のパラメータ ϵ を用いて与えることが出来ることを示す。

Ochi 等により示された精度 ϵ の近似 GCD は、多項式 $P(x,y), Q(x,y)$ に対し、

$$\begin{aligned}
P(x,y) &= G(x,y)\tilde{P}(x,y) + \delta P(x,y),\ ||\delta P(x,y)|| = O(\epsilon),\\
Q(x,y) &= G(x,y)\tilde{Q}(x,y) + \delta Q(x,y),\ ||\delta Q(x,y)|| = O(\epsilon),
\end{aligned}$$

により定義される。ここで、$G(x,y)$ が近似 GCD である。この定義と有理関数近似の関係は $\tilde{P}(x,y) = p(x,y), \tilde{Q}(x,y) = q(x,y)$ により表される。ここで、もし x,y が取り得る範囲を $-1 \leq x,y \leq 1$ と仮定すると、$\delta P, \delta Q$ の大きさは次のように評価できる。

$$\max_{-1 \leq x,y \leq 1} |\delta P(x,y)| \leq T_{\delta P}||\delta P(x,y)|| = T_{\delta P}C_1\epsilon = \epsilon_1,$$

$$\max_{-1\le x,y\le 1}|\delta Q(x,y)| \le T_{\delta Q}||\delta Q(x,y)|| = T_{\delta Q}C_2\epsilon = \epsilon_2.$$

ここで C_1, C_2 は、$||\delta P(x,y)|| = C_1\epsilon$、$||\delta Q(x,y)|| = C_2\epsilon$ をそれぞれ表す数である。また、$T_{\delta P}, T_{\delta Q}$ を $\delta P, \delta Q$ に含まれる項数とする。その時、次のように誤差評価が得られる。

- $1 \le |Q(z,w)|$ を満足する $z, w \in [-1,1]$ に対して、

$$\left|\frac{p(z,w)}{q(z,w)} - \frac{\tilde{p}(z,w)}{\tilde{q}(z,w)}\right| \le \left(1 + \left|\frac{p(z,w)}{q(z,w)}\right|\right)\frac{\tilde{\epsilon}}{1-\tilde{\epsilon}},$$

  が成り立つ。ここで、$\tilde{\epsilon} = \max\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ である。

前節の例についてこの評価を適用する。近似 GCD を取り除いて得られた剰余の多項式は次式になる。

$$\begin{aligned}
\delta P(x,y) &= p(x,y) - \tilde{p}(x,y)\cdot g(x,y)\\
&= (-9.2360\times 10^{-10}y^5 + 1.6518\times 10^{-9}y^4 + 3.5817\times 10^{-4}y^3\\
&\quad -1.6880\times 10^{-3}y^2 + 1.4567\times 10^{-3}y - 3.5885\times 10^{-4})x\\
&\quad +2.6836\times 10^{-10}y^6 + 4.2864\times 10^{-10}y^5 - 1.0408\times 10^{-5}y^4\\
&\quad -1.3580\times 10^{-4}y^3 + 8.2989\times 10^{-4}y^2 - 7.4599\times 10^{-4}y + 1.8708\times 10^{-4}\\
\delta Q(x,y) &= q(x,y) - \tilde{q}(x,y)\cdot g(x,y)\\
&\quad (1.0719\times 10^{-5}y^2 - 4.4176\times 10^{-5}y + 1.7515\times 10^{-5})x\\
&\quad -3.1143\times 10^{-7}y^3 - 4.2480\times 10^{-6}y^2 + 2.2299\times 10^{-5}y - 9.2130\times 10^{-6}
\end{aligned}$$

この式より $||\delta P|| = 1.6880\times 10^{-3}$、$||\delta Q|| = 4.4176\times 10^{-5}$ である。従って、$\epsilon_1 = T_{\delta P}||\delta P|| = 12\cdot 1.6880\times 10^{-3} = 2.0256\times 10^{-2}$、$\epsilon_2 = T_{\delta Q}||\delta Q|| = 7\cdot 4.4176\times 10^{-5} = 3.0923\times 10^{-4}$ となる。以上より、$\tilde{\epsilon} = 2.0256\times 10^{-2}$ であり、$(i,j)\in E$ に対し、

$$\begin{aligned}
\left|\frac{p(x_i,y_j)}{q(x_i,y_j)} - \frac{\tilde{p}(x_i,y_j)}{\tilde{q}(x_i,y_j)}\right| &\le (1+\max(f_{i,j}))\frac{\tilde{\epsilon}}{1-\tilde{\epsilon}}\\
&= (1+3.69453)\frac{2.0256\times 10^{-2}}{1-2.0256\times 10^{-2}}\\
&= 9.70584\times 10^{-2}
\end{aligned}$$

と評価できる。得られた誤差評価は得られた有理関数近似の誤差と矛盾しない。

4 まとめ

本論では、二変数ハイブリッド有理関数近似の方法について例題を示し、得られる近似の誤差評価を行なう方法を述べた。誤差評価の方法は、一変数のハイブリッド有理関数近

似と同様な方法で与えることが出来る。

しかし、[6] で示したように二変数有理関数補間の場合は不必要な特異点を近似 GCD では取り除くことが困難な場合も存在する。本論で述べた方法の適用範囲を明らかにするために、

- どのような場合に不必要な特異点があらわれるか

を解明することが今後の課題としてあげられる。

参考文献

[1] R. M. Corless, P. M. Gianni, B. M. Trager and S. M. Watt, The Singular Value Decomposition for polynomial systems, *Proc. ISSAC'95*, 1995, 195–207.

[2] A. A. M. Cuyt and B. M. Verdonk, General Order Newton-Padé Approximants for Multivariate Functions, Numer. Math., **43**, 1984, 293–307.

[3] M. T. Noda, E. Miyahiro and H. Kai, Hybrid rational function approximation and its use in the hybrid integration, *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations VII*, IMACS, 1992, 565–571.

[4] M. Ochi, M. T. Noda and T. Sasaki, Approximate Greatest Common Divisor of Multivariate Polynomials and Its Application to ill-Conditioned Systems of Algebraic Equations, *Journal of Information Processing*, **14**(3), 1991, 292–300.

[5] H. Kai and M. T. Noda, Hybrid Rational Function Approximation and Its Accuracy Analysis, *Reliable Computing*, **6**, 2000, 429–438.

[6] 甲斐博、木原信二、野田松太郎、二変数有理関数近似のハイブリッド計算と多変数近似 GCD アルゴリズム、数理解析研究所講究録 **1138**, 「数式処理における理論と応用の研究」、2000, 77-86.